

# Jeux

## I) Jeux finis

### 1) Définition

On modélise un jeu (à deux joueurs) par un graphe orienté  $G$ , les sommets étant les états possibles du jeu, et les arcs les transitions.

À partir d'un sommet initial  $s_0$  (la position initiale du jeu), les joueurs jouent tour à tour, en se déplaçant, à chaque étape, d'un sommet  $s$  du graphe à un sommet  $s'$  tel que  $s \rightarrow s'$  soit un arc. Un joueur perd si à son tour de jouer, le sommet sur lequel il est n'a aucun arc sortant.

**Exemple** Dans le jeu de Nim, un tas contient un certain nombre de bâtonnets. Tour à tour le joueur doit retirer 1, 2 ou 3 bâtonnets. Le premier joueur à ne pas pouvoir jouer perd.

Les positions du jeu sont décrites par le nombre  $n \in \mathbb{N}$  de bâtonnets restants, et dans le graphe du jeu ci-contre, le sommet étiqueté  $n$  a au plus trois arcs sortants, vers  $n - 1$ ,  $n - 2$  et  $n - 3$ .



**Définition** Une **partie** est ou bien une suite finie  $(s_k)_{0 \leq k \leq n}$  de sommets de  $G$  dont le dernier terme est un sommet sans successeur, ou bien une suite infinie  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall i, s_i \rightarrow s_{i+1}$ .

**Définition** On dit qu'un **jeu** est **fini** si toute partie est finie.

*Remarque* Dans le cas d'un jeu avec un nombre fini d'états possibles, le jeu est fini si et seulement si le graphe du jeu est acyclique.

### 2) Stratégie

**Définition** Une **stratégie** est une application  $f: V \rightarrow V \cup \{\times\}$  telle que pour tout  $v \in V$ , si  $v$  n'a pas de successeur  $f(v) = \times$ , et sinon  $f(v)$  est l'un des successeurs de  $v$ .

**Définition** Étant données deux stratégies  $f_1, f_2$  et un sommet initial  $s_0$ , la partie associée à  $(f_1, f_2, s_0)$  est la suite des sommets obtenue en posant  $s_1 = f_1(s_0)$ ,  $s_2 = f_2(s_1)$ ,  $s_3 = f_1(s_2)$ , etc, tant que le sommet actuel admet un successeur.

**Définition** Une stratégie  $f_1$  est dite **gagnante** pour un sommet  $s_0$  pour le premier joueur si quelle que soit la stratégie  $f_2$  du second, la partie associée à  $(f_1, f_2, s_0)$  est gagnante pour le premier joueur.

**Définition** Un sommet  $s_0$  est dit

- **gagnant** (pour le premier joueur) s'il existe une stratégie gagnante.
- **perdant** si le second joueur a une stratégie gagnante.
- **déterminé** s'il est gagnant ou perdant.

**Exercice** On considère un disque de rayon 10. Tour à tour, les joueurs doivent placer une pièce de rayon 1 dans le disque, de manière disjointe des pièces déjà placées. Montrer que le premier joueur a une stratégie gagnante<sup>†</sup>.

**Exemple** Dans la version du jeu de Nim décrite plus haut, le premier joueur a une stratégie gagnante si le nombre de bâtonnets initiaux  $n$  n'est pas congru à 0 modulo 4. En effet, s'il est dans un tel état  $n$ , il peut jouer de sorte à laisser un nombre de bâtonnets  $n'$  congru à 0 modulo 4. Si  $n' = 0$ , son adversaire perd, et sinon, quel que soit son coup, le joueur initial se retrouve à nouveau avec un nombre de bâtonnets  $\not\equiv 0[4]$ , ce qui lui garantit de toujours pouvoir jouer.

### 3) Théorème de Zermelo

**Théorème** Tout jeu fini est entièrement déterminé (c'est-à-dire que tout sommet est déterminé).

*Démonstration.* Soit  $k \in K$  un élément dans aucun de ces deux ensembles. Aucun des successeurs de  $k$  n'est dans  $J_{2,k}$ , sinon  $J_1$  peut le jouer, et tous les successeurs de  $k$  ne peuvent pas être dans  $J_{1,k}$ , sinon,  $J_2$  gagnerait. Donc  $k$  admet un successeur dans  $K$ . Donc il existe une partie infinie.  $\square$

*Remarque* Si on autorise des matchs nuls, via certains états, ou via des cycles, alors pour chaque sommet, on a l'une des trois alternatives suivantes : 1. l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante 2. pour chaque joueur, il existe une stratégie qui lui garantit au moins un match nul. Dans le second cas, si chaque joueur joue sa stratégie, la partie sera nulle.

**Exemple** Au jeu des échecs on interdit les parties infinies en déclarant une partie nulle si une même position se répète trois fois. Ce jeu relève alors de la remarque précédente, mais on ne sait pas quelle est l'alternative correcte. En pratique, on constate que les blancs ont un avantage, donc la question est de savoir si les blancs ont une stratégie gagnante, ou si les noirs ont une stratégie qui garantit au moins un match nul.

**Exemple** Aux doubles échecs, chaque joueur joue deux coups d'affilée. En raisonnant par l'absurde, montrer que le premier joueur a une stratégie qui garantit au moins un match nul<sup>‡</sup>.

<sup>†</sup>. Commencer par placer une pièce au centre, puis penser symétrie <sup>‡</sup>. Voler la stratégie du second joueur!

## II) Jeux infinis

On considère des jeux infinis à deux joueurs où, tour à tour, chaque joueur choisit un entier positif. Ils définissent ainsi conjointement une suite  $(u_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ .

À toute partie  $S \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  on associe le jeu  $J_S$  qui se déroule comme décrit précédemment, et pour lequel la suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  construite est gagnante pour le premier joueur si et seulement si  $u \in S$ .

On s'intéresse au caractère déterminé de ces jeux : l'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ?

### 1) Premiers exemples

**Exemple** Pour  $i, k \in \mathbb{N}$ , si  $S$  est l'ensemble des suites vérifiant  $u_i = k$ , le joueur gagnant est celui qui choisit le terme  $u_i$  (qui dépend donc de la parité de  $i$ ).

**Exemple** Si  $S$  est l'ensemble des suites qui prennent deux fois de suite la même valeur, le premier joueur est gagnant. Si  $S$  est l'ensemble des suites qui prennent trois fois de suite la même valeur, le second joueur est gagnant.

**Exemple** Si  $S$  est l'ensemble des suites qui tendent vers l'infini, le second joueur est gagnant, si c'est l'ensemble des suites non majorées, le premier joueur est gagnant.

**Exemple** Si  $S$  est l'ensemble des suites périodiques APCR, le second joueur est gagnant.

**Exemple** Pour  $S$  l'ensemble des suites surjectives le premier joueur gagne, pour les suites injectives, le second joueur gagne.

**Exemple** Si  $S$  est l'ensemble des suites prenant une infinité de fois la même valeur, le premier joueur est gagnant.

### 2) Assertions logiques et représentation ensembliste

Les parties  $S$  des exemples précédents peuvent être simplement décrites ou bien

- par des formules logiques,
- par des réunions/intersections dénombrables d'ensembles, à partir des ensembles «élémentaires»  $S_{i,k} = \{(u_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid u_i = k\}$ .

**Exemple**  $\exists n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, u_n = k$  et  $u_{n+1} = k \Leftrightarrow (u_n) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_{n,k} \cap S_{n+1,k}$

**Exemple**  $u_n$  non majorée  $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq m \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists k \geq m, u_n = k \Leftrightarrow (u_n) \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} S_{n,k}$

**Exemple**  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq m \Leftrightarrow (u_n) \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} \bigcup_{k \geq m} S_{n,k}$

**Exemple**  $(u_n)$  périodique  $\Leftrightarrow \exists T \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+T} \Leftrightarrow (u_n) = \bigcup_{T \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_{n,k} \cap S_{n+T,k}$ .

**Exercice** Faire de même pour 1. l'ensemble des suites surjectives/injectives 2. l'ensemble des suites prenant une infinité de fois la même valeur.

**Définition** On peut décrire la «complexité» d'une formule logique par le nombre d'interversions de quantificateurs nécessaires pour la définir, ce qui correspond au nombre d'interversions de  $\cap$  et  $\cup$  dans la définition ensembliste.

**Remarque** Il est difficile de concevoir des formules utiles qui aient beaucoup d'interversions. La propriété  $u_n \rightarrow +\infty$  a 3 interversons, la propriété « $(u_n)$  converge» en aurait 4 ( $\exists \ell \in \mathbb{R}, u_n \rightarrow \ell$ ), mais on peut en fait l'écrire avec 3 interversons (cf [a](#)).

### 3) Des jeux plus compliqués

#### a) Des graphes particuliers sur $\mathbb{N}$

On interprète la suite  $(u_n)$  construite comme la donnée d'arêtes dans un graphe non orienté dont l'ensemble des sommets est  $\mathbb{N}$ . Si  $u_i = k$ , on met une arête du sommet  $i$  au sommet  $k$ . On notera  $i \rightarrow_u k$  la propriété  $u_i = k$ .

On va prendre pour  $S$  l'ensemble des suites pour lesquelles le graphe est connexe.

**Proposition** Pour un graphe  $\mathcal{G}$  ainsi construit, deux sommets  $x, y \in \mathbb{N}$  sont dans la même composante connexe si et seulement si  $x$  et  $y$  ont un «descendant commun», au sens où il existe deux entiers  $n, m$  et des suites  $x = x_0 \rightarrow_u x_1 \rightarrow_u x_2 \dots \rightarrow_u x_n$  et  $y = y_0 \rightarrow_u y_1 \rightarrow_u y_2 \dots \rightarrow_u y_m$  telles que  $x_n = y_m$ .

*Démonstration.*  $\Leftarrow$  : clair

$\Rightarrow$  : On procède par récurrence sur la longueur  $\ell$  du plus court chemin de  $x$  à  $y$ .

Le cas  $\ell = 0$  est trivial. Si  $\ell = 1$ , alors il y a une arête entre  $x$  et  $y$ , donc ou bien  $x \rightarrow_u y$  ou bien  $y \rightarrow_u x$ . d'où le résultat.

Supposons le résultat correct pour  $\ell \in \mathbb{N}$  donné. Soient  $x, y$  avec un plus court chemin de longueur  $\ell$  entre les deux. Si la première étape de ce chemin de  $x$  à  $y$  commence par une arête  $x \rightarrow_u x'$ , en appliquant l'hypothèse de récurrence à  $x'$  et  $y$ , le descendant commun à  $x'$  et  $y$  est un descendant commun à  $x$  et  $y$ .

Sinon, c'est une arête  $x' \rightarrow_u x$ . On sait que  $x'$  et  $y$  ont un descendant commun, mais tout descendant de  $x'$  est ou bien  $x'$  lui-même, ou bien un descendant de  $x$ , donc  $x$  et  $y$  ont un descendant commun.  $\square$

Notons  $u_i^{(n)}$  la suite définie par  $u_i^{(0)} = i$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_i^{(n+1)} = u_{u_i^{(n)}}$ .

Grâce à la proposition précédente, on peut écrire  $(u_n) \in S \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, u_x^{(n)} = u_y^{(m)}$ .

Pour chaque  $n, m \in \mathbb{N}$  fixés, l'assertion  $u_x^{(n)} = z$  s'écrit comme  $\exists x_1, \exists x_2, \dots, \exists x_{n-1}, u_x = x_1$  et  $u_{x_1} = x_2$  et  $\dots$  et  $u_{x_{n-1}} = z$ .

L'ensemble  $S$  est donc défini par une formule logique avec un nombre de quantificateurs non borné (mais un nombre fini d'interventions de quantificateurs néanmoins).

**Exercice** Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ? §

### b) Des séries convergentes

On peut interpréter une suite  $(u_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  comme une suite  $(v_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  en comptant toute valeur  $u_k \geq 1$  comme valant 1.

On va supposer que la suite construite commence à l'indice 1 et qu'elle est à valeurs dans  $\{\pm 1\}$ . On la notera  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ .

On note  $S_h$  l'ensemble des suites  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  pour lesquelles la suite des sommes partielles  $(\sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{k})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.

#### α) Aparté : Traduire la convergence d'une suite

Si  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , la propriété « $(u_n)$  converge» s'écrit  $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$ . Cela donne la représentation ensembliste  $\bigcup_{\ell \in \mathbb{R}} \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} |u_n - \ell| \leq \varepsilon$ .

Cette représentation ensembliste diffère des représentations que l'on obtenait précédemment en ce que les deux premières réunion et intersection sont non dénombrables.

Pour rester dans le contexte de la partie 4), on peut s'efforcer de les rendre dénombrables :

1. La quantification  $\forall \varepsilon > 0, \dots, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$  peut être remplacée par  $\forall m \in \mathbb{N}^*, \dots, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{m}$ .
2. La quantification  $\exists \ell \in \mathbb{R}$  est plus subtile et nécessite d'utiliser le critère de convergence de Cauchy (cf Feuille culturelle sur les suites) : une suite  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  converge si et seulement si  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$ .

On peut donc finalement écrire :

$$(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, |u_p - u_q| \leq \frac{1}{m},$$

ce qui correspond à des réunions/intersections dénombrables d'ensembles «élémentaires» de la forme  $|u_p - u_q| \leq \frac{1}{m}$ .

### β) Retour à $S_h$ .

On a  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1} \in S_h \Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge  $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq q \geq n_0, \left| \sum_{k=q}^p \frac{\varepsilon_k}{k} \right| \leq \frac{1}{m}$

Pour  $p, q, m$  fixé, la condition  $\left| \sum_{k=q}^p \frac{\varepsilon_k}{k} \right| \leq \frac{1}{m}$  peut s'écrire une réunion finie d'intersections d'ensembles  $S_{k,u}$ , pour  $k \in \llbracket q, p \rrbracket$  et  $u \in \{\pm 1\}$ .

**Exercice** Quel joueur a une stratégie gagnante ? ¶

**Exercice ★** On note  $S_0$  l'ensemble des suites pour lesquelles  $(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k u_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers 0, où  $u_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{\lfloor k/2 \rfloor}}{k} & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^{\lfloor k/2 \rfloor}}{4k} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$ .

Montrer que le premier joueur (qui joue aux indices impairs) a une stratégie gagnante.

### c) Des graphes arbitraires sur $\mathbb{N}$

Considérons la bijection  $\delta$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\Delta^- = \{(i, j) \in \mathbb{N}^* \mid j < i\}$ , définie par l'énumération :

$$(1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), \dots$$

À l'aide de cette bijection, on peut interpréter toute suite de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  comme une suite de  $\{0, 1\}^{\Delta^-}$ , qui elle-même peut s'interpréter comme la donnée d'un graphe non orienté sans boucles sur l'ensemble des sommets  $\mathbb{N}$ .

En pratique les joueurs choisissent tour à tour soit 0 soit 1 et ces choix correspondent à l'existence d'une arête dans le graphe. On choisit d'abord si on relie 1 et 0 par une arête, puis 2 et 0, puis 2 et 1, puis 3 et 0, etc.

Pour  $i > j$ , on note  $i \rightarrow j$  si  $u_{\delta^{-1}((i,j))} = 1$ . Pour  $i, j \in \mathbb{N}$ , on note  $i \leftrightarrow j$  si  $i > j$  et  $u_{\delta^{-1}((i,j))} = 1$  ou  $i < j$  et  $u_{\delta^{-1}((j,i))} = 1$ .

#### Chemins

On note  $S_+$  l'ensemble des suites pour lesquelles le graphe contient des chemins arbitrairement longs et  $S_*$  l'ensemble des suites pour lesquelles le graphe contient un chemin de longueur infinie.

L'existence d'un chemin de longueur  $k$  s'écrit  $S_k = \bigcup_{x_1 < \dots < x_k} (x_1 \leftrightarrow x_2 \text{ et } x_2 \leftrightarrow x_3 \text{ et } \dots \text{ et } x_{k-1} \leftrightarrow x_k)$ . L'existence de chemins arbitrairement longs est  $S_+ = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} S_k$ .

**Propriété** L'ensemble  $S_*$  ne peut pas se construire à l'aide de réunions et d'intersections dénombrables des ensembles élémentaires  $S_{n,k}$ .

**Exercice** Montrer que le premier joueur a une stratégie gagnante pour  $S_*$ .

§. Le second joueur gagne, en donnant un successeur pair à chaque sommet pair. ¶. le premier joueur gagne, en jouant n'importe quel premier coup, et toujours le signe opposé du coup du joueur précédent

## Cliques

**Exemple** L'ensemble des suites pour lesquelles le graphe construit contient un triangle est  $S = \bigcup_{x,y,z \in \mathbb{N}} (z \leftrightarrow y \text{ et } y \leftrightarrow x \text{ et } z \leftrightarrow x)$ .

**Exercice** Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

On dit que  $\mathcal{K} \subset \mathbb{N}$  forme une clique dans le graphe si  $\forall i, j \in \mathcal{K}, i \neq j \Rightarrow i \leftrightarrow j$ .

Enfin, on peut considérer  $S_{\mathcal{K}}$  l'ensemble des suites pour lesquelles le graphe admet une clique infinie.

**Exercice** ★ Existe-t-il une stratégie gagnante pour le jeu associé à  $S_{\mathcal{K}}$  ?

## 4) Théorème de détermination de Borel et axiome de détermination

### Tribu des boréliens

**Définition** On note  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$  la **tribu des boréliens**, définie comme la plus petite collection de parties de  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  telle que

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, S_{n,k} \in \mathcal{B}$ .
- $\forall A \in \mathcal{B}, \overline{A} \in \mathcal{B}$
- Si  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite d'ensembles de  $\mathcal{B}$ , alors  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}$ .

*Remarque* La stabilité par réunion dénombrable et par passage au complémentaire impliquent la stabilité par intersection dénombrable : si  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$  alors  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}$ .

*Remarque* Autrement dit, les boréliens sont tous les ensembles que l'on peut construire à partir des  $S_{n,k}$  à l'aide de réunions et d'intersections dénombrables.

*Remarque* On s'intéresse habituellement plutôt aux boréliens  $\mathbb{R}$ , qui sont définis en remplaçant les  $S_{n,k}$  par les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

### «Complexité» des ensembles boréliens

Les ensembles décrits dans les parties précédentes sont tous des boréliens (sauf  $S_*$ ). On s'est nécessairement restreint à des ensembles qui étaient «compréhensibles», il peut exister des boréliens qui font intervenir une infinité d'interventions de quantificateurs.

La complexité des boréliens est néanmoins contrôlée par le théorème d'induction transfinie suivant

**Théorème** Soit  $\mathcal{P}(S)$  une propriété qui dépend d'un ensemble  $S \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . Si  $\mathcal{P}$  est vérifiée par tous les  $S_{n,k}$ , si  $\mathcal{P}(A) \Rightarrow \mathcal{P}(\overline{A})$  et si  $\forall i \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(A_i) \Rightarrow \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$ , alors  $\mathcal{P}$  est vérifiée par tous les boréliens.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des ensembles  $S$  tels que  $\mathcal{P}(S)$  soit vérifiée. Alors  $\mathcal{C}$  contient les  $S_{n,k}$ , est stable par complémentaire, et est stable par réunion dénombrable, donc, par minimalité de  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  contient tous les boréliens.  $\square$

### Théorème de Borel

**Théorème** Soit  $S \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  un borélien. Alors le jeu  $J_S$  est déterminé.

*Démonstration.* Non trivial.  $\square$

*Remarque* Ce théorème ne s'applique pas à l'ensemble  $S_*$ , qui est pourtant bien déterminé.

### Axiome de détermination

L'axiome de détermination (AD) est un axiome, selon lequel pour toute partie  $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  le jeu  $J_A$  est déterminé.

Il a entre autres la conséquence sympathique suivante, qui permet de définir la «longueur» de toute partie de  $\mathbb{R}$ .

**Théorème** Il existe une fonction  $\lambda: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ , appelée mesure de Lebesgue vérifiant

- pour tout  $a \leq b$ ,  $\lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) = b - a$ .
- si  $A, B \subset \mathbb{R}$  sont disjointes  $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ .
- plus généralement, si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille de parties deux à deux disjointes,  $\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n)$ .

*Remarque* On peut de même définir une application «aire» sur toutes les parties de  $\mathbb{R}^2$ .

**Propriété** L'axiome de détermination est incompatible avec l'axiome du choix.

*Démonstration.* Cf la partie suivante.  $\square$

*Remarque* Ce résultat est incompatible avec l'axiome du choix. Sous l'axiome du choix, la mesure de Lebesgue n'est pas définie sur toutes les parties de  $\mathbb{R}$ .

### III) Construction d'un jeu non déterminé

On va partiellement décrire comment l'axiome du choix implique l'existence d'un jeu non déterminé.

#### L'hypothèse du continu

Pour simplifier les notions en jeu, on supposera l'hypothèse du continu suivante, qui stipule que tout ensemble infini «strictement plus petit» que  $\mathbb{R}$  est dénombrable.

**Axiome** Soit  $A$  un ensemble. S'il existe une surjection  $\mathbb{R} \rightarrow A$ , alors  $A$  est soit fini, soit dénombrable, soit en bijection avec  $\mathbb{R}$ .

*Remarque* Cette hypothèse est indépendante de la théorie ZFC, c'est-à-dire qu'il n'est ni possible de la démontrer, ni de l'infirmer.

#### L'ensemble des stratégies est équivalent à $\mathbb{R}$

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des stratégies possibles et  $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites finies.

On peut voir une stratégie comme une application qui à toute suite finie de coups (les coups précédents) associe un entier (le coup que l'on va jouer).

**Proposition**  $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$  est dénombrable.

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{N}_k$  l'ensemble des suites finies d'au plus  $k$  termes, dont tous les termes sont  $\leq k$ . Alors  $\mathcal{N}_k$  est fini, et  $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_k$ , donc  $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$  est dénombrable, comme réunion dénombrable de parties finies.  $\square$

Comme on a identifié  $\mathcal{S}$  à l'ensemble des fonctions  $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ , la proposition précédente justifie que  $\mathcal{S}$  est en bijection avec l'ensemble des fonctions  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , c'est-à-dire l'ensemble des suites.

On rappelle le théorème de Cantor-Bernstein :

**Théorème** S'il existe une injection  $A \rightarrow B$  et une injection  $B \rightarrow A$ , il existe une bijection  $A \rightarrow B$ .

**Proposition**  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  est en bijection avec  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* L'application  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  qui à un réel associe la suite constituée de sa partie entière, suivie de la suite des termes de son développement décimal est injective.

Réiproquement, à une suite d'entiers  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut associer le réel  $x \in [0, 1[$  dont le développement décimal est constitué de  $u_0$  chiffres 1, suivis d'un 0, suivis de  $u_1$  chiffres 1, suivis d'un 0, etc. Cette association est clairement injective.  $\square$

#### L'axiome du choix permet de bien ordonner $\mathbb{R}$

On rappelle qu'un bon ordre est une relation d'ordre totale pour laquelle tout ensemble non vide admet un minimum, ou encore pour laquelle il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante.

Le résultat suivant est une conséquence quelque peu douteuse de l'axiome du choix (et de l'hypothèse du continu).

**Théorème** Il existe un bon ordre sur  $\mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  l'ensemble  $\{y \in \mathbb{R} \mid y \preceq x\}$  soit au plus dénombrable.

*Démonstration.* Cf feuille culturelle sur les ordinaux.  $\square$

*Remarque* L'existence d'un bon ordre sur  $\mathbb{R}$  nécessite l'axiome du choix. Il n'est pas possible d'en construire un de manière «explicite».

*Remarque* Sans l'hypothèse du continu, il faut remplacer «dénombrable» par «de cardinal strictement plus petit que  $\mathbb{R}$ ».

#### Parties cohérentes avec une stratégie

Étant donné une stratégie  $\sigma$ , on dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (c'est-à-dire une partie du jeu) est  $A$ -cohérente avec  $\sigma$  s'il est possible d'obtenir cette partie si le premier joueur suit la stratégie  $\sigma$ . On dit qu'elle est  $B$ -cohérente avec  $\sigma$  si on peut l'obtenir si le second joueur suit la stratégie  $\sigma$ .

*Remarque* Étant donné une stratégie  $\sigma$ , l'ensemble des parties  $B$ -cohérentes avec  $\sigma$  est en bijection avec  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , puisque le choix d'une telle partie est équivalent à la suite des coups du joueur  $A$ . En particulier, l'ensemble des parties  $B$ -cohérentes avec  $\sigma$  est non dénombrable.

Munissons l'ensemble  $\mathcal{S}$  des stratégies d'un bon ordre pour lequel  $\forall \sigma \in \mathcal{S}, \{\tau \mid \tau \preceq \sigma\}$  soit au plus dénombrable. On munit également l'ensemble des suites,  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , d'un bon ordre.

On souhaite construire un jeu non déterminé. Pour cela, on va montrer l'existence de deux ensembles disjoints  $A, B$  tels que pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}$ ,  $A$  contienne une suite  $B$ -cohérente avec  $\sigma$  et  $B$  contienne une suite  $A$ -cohérente avec  $\sigma$ .

(Si ces deux parties existent, alors aucune stratégie  $\sigma$  n'est gagnante pour le jeu associé à  $A$ )

## Construction de $A, B$ par récursion transfinie

On va construire ces deux parties  $A, B$  petit à petit en partant de  $A_0 = B_0 = \emptyset$  et en considérant les stratégies une à une, suivant le bon ordre.

**Lemme** Soit  $\sigma$  une stratégie. On suppose qu'il existe deux familles  $(A_\tau)_{\tau \prec \sigma}, (B_\tau)_{\tau \prec \sigma}$  de parties de  $\mathbb{N}^\mathbb{N}$  indexées par les stratégies  $\tau \prec \sigma$  vérifiant

- (i)  $\forall \tau \prec \sigma, A_\tau \cap B_\tau = \emptyset$
- (ii) pour tout  $\tau$ , les parties  $A_\tau$  et  $B_\tau$  sont au plus dénombrables
- (iii) les deux familles sont croissantes pour l'inclusion :  $\tau \prec \tau' \Rightarrow A_\tau \subset A_{\tau'}$ .
- (iv) pour tout  $\tau$ ,  $A_\tau$  contient une suite  $B$ -cohérente avec  $\tau$ , et  $B_\tau$  une suite  $A$ -cohérente avec  $\tau$ .

Comme  $\{\tau \mid \tau \prec \sigma\}$  est dénombrable, les parties  $A_\sigma^* = \bigcup_{\tau \prec \sigma} A_\tau$  et  $B_\sigma^* = \bigcup_{\tau \prec \sigma} B_\tau$  sont dénombrables.

Si  $A_\sigma^*$  contient une partie  $B$ -cohérente avec  $\sigma$ , on pose  $A_\sigma = A_\sigma^*$ . Sinon, comme  $B_\sigma^*$  est dénombrable et que l'ensemble des parties  $B$ -cohérentes avec  $\sigma$  ne l'est pas on choisit une suite  $u$   $B$ -cohérente avec  $\sigma$ , et on pose  $A_\sigma = A_\sigma^* \cup \{u\}$ . Pour rendre ce choix déterministe, on choisit  $u$  comme la plus petite suite n'appartenant pas à  $B_\sigma^*$ , pour le bon ordre sur  $\mathbb{N}^\mathbb{N}$  choisi initialement.

De même on définit  $B_\sigma$  en ajoutant à  $B_\sigma^*$ , si nécessaire, une suite  $A$ -cohérente avec  $\sigma$  qui n'appartient pas à  $A_\sigma$ .

**Proposition** Il existe un unique couple de familles  $(A_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}, (B_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}$  vérifiant les propriétés (i) à (iv) ainsi que

- (v) pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}$ ,  $A_\sigma$  et  $B_\sigma$  sont obtenus en appliquant la construction du lemme précédent

*Démonstration.* Unicité : Soient  $(A_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}, (B_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}$  et  $(A'_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}, (B'_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}}$  deux telles suites. On considère l'ensemble des  $\sigma \in \mathcal{S}$  pour lesquels  $(A_\sigma, B_\sigma) \neq (A'_\sigma, B'_\sigma)$ .

D'après la propriété de bon ordre, si cet ensemble était non vide, il admettrait un plus petit élément  $\sigma_0$ , ce qui amènerait à une contradiction.

Existence : On considère l'ensemble des  $\sigma$  pour lesquels il n'existe pas de telles familles  $(A_\tau)_{\tau \preceq \sigma}, (B_\tau)_{\tau \preceq \sigma}$ . À nouveau, cet ensemble, s'il est non vide, admet un plus petit élément, que l'on note  $\sigma$ . D'après l'unicité, il existe des familles  $(A_\tau)_{\tau \prec \sigma}$  et  $(B_\tau)_{\tau \prec \sigma}$  qui vérifient les hypothèses du lemme, et qui permettent de définir  $A_\sigma$  et  $B_\sigma$ , contredisant l'hypothèse.  $\square$

## Conclusion

**Proposition** Il existe un jeu non déterminé.

*Démonstration.* Notons  $A = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} A_\sigma$  et  $B = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} B_\sigma$ . Alors  $A$  et  $B$  sont disjoints, et le jeu associé à  $A$  est non déterminé.  $\square$